Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2018, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x + my} & \boldsymbol{= 1} \\ \boldsymbol{-2x - (m+1)y} & \boldsymbol{+z = -1} \\ \boldsymbol{x + (2m-1)y} & \boldsymbol{+(m+2)z = 2 + 2m} \end{cases}$ **se pide:**

a) **Discutir el sistema en función del parámetro m.**
b) **Resolver el sistema en el caso** $\boldsymbol{m = 0}$.

Solución:

a) **Discutir el sistema en función del parámetro m.**

La matriz ampliada del sistema es:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = 1(-(m+1)(m+2) - 1(2m-1)) - m(-2(m+2) - 1(1)) + 0 =$$
$$= -(m^2+3m+2) - (2m-1) - m(-2m-4-1) = -m^2 - 3m - 2 - 2m + 1 - m(-2m-5) =$$
$$= -m^2 - 5m - 1 + 2m^2 + 5m = m^2 - 1$$

Igualamos el determinante a cero para encontrar los valores críticos de m:

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \implies m^2 = 1 \implies m = 1, \quad m = -1.$$

Caso 1: Si $\boldsymbol{m \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{m \neq -1}$. En este caso, $|A| \neq 0$, por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 3$. Como el número de incógnitas es 3, $\text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.).

Caso 2: Si $\boldsymbol{m = 1}$.
Sustituimos $m = 1$ en la matriz ampliada:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ para $m = 1$, $\text{Rg}(A) < 3$.
Buscamos un menor de orden 2 no nulo en A: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \neq 0$.
Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.
Estudiamos el rango de la ampliada A^*. Buscamos una matriz 3x3 no nula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4 - (-3)) - 0 + 1(-6 - 1) = 7 - 7 = 0.$$

Como todos los menores de orden 3 son nulos (ya que $|A| = 0$ y el que incluye la columna de términos independientes también es 0), $\text{Rg}(A^*) = 2$.
Dado que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$ (nº de incógnitas), el sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I.) con $3 - 2 = 1$ grado de libertad.

Caso 3: Si $m = -1$. Sustituimos $m = -1$ en la matriz ampliada:

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, así que $\text{Rg}(A) < 3$. Buscamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{Rg}(A) = 2$.
Estudiamos el rango de la ampliada A^*. Oramos el menor anterior con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-3) - (-1)(0-(-1)) + 1(6-0) = -3 - (1) + 6 = -3 - 1 + 6 = 2 \neq 0.$$

Como existe un menor de orden 3 no nulo en A^*, $\text{Rg}(A^*) = 3$. Dado que $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$, el sistema es Incompatible (S.I.).

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$: S.C.D. (Solución única)
Si $m = 1$: S.C.I. (Infinitas soluciones, 1 grado de libertad)
Si $m = -1$: S.I. (Sin solución)

b) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Para $m = 0$, estamos en el Caso 1 ($m \neq 1, m \neq -1$), por lo que el sistema es S.C.D. El sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer, ya que $|A|_{m=0} = 0^2 - 1 = -1$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(-1(2) - 1(-1))}{-1} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(-1(2) - 1(2)) - 1(-2(2) - 1(1)) + 0}{-1} = \frac{1(-4) - 1(-5)}{-1} = \frac{-4+5}{-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1(-1(2) - (-1)(-1)) - 0 + 1(-2(-1) - (-1)(1))}{-1} = \frac{1(-2-1) + 1(2+1)}{-1} = \frac{-3+3}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

)

Para $m = 0$, la solución es $x = 1, y = -1, z = 0$.

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

a) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92, m_2 = 0.94, m_3 = 0.89, m_4 = 0.90, m_5 = 0.91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$, donde In significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92, m_2 = 0.94, m_3 = 0.89, m_4 = 0.90, m_5 = 0.91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

$$E`(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + 2(x - m_3) + 2(x - m_4) + 2(x - m_5) = 0$$

$$2[5x - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)] = 0$$

$$x = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)}{5}$$

Es decir, el valor de x que minimiza la suma de cuadrados de los errores es la media aritmética de todas las medidas:

$$x = \frac{(0,92 + 0,94 + 0,89 + 0,90 + 0,91)}{5} = \frac{4,56}{5} = 0,92$$

Para confirmar que es un mínimo, calculamos la segunda derivada:

$$E''(x) = 25 = 10$$

Como $E''(x) = 10 > 0$, el valor encontrado corresponde a un mínimo.

El valor que minimiza la suma de errores cuadrados es $x = 0.912$ (la media aritmética).

b) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$, donde In significa logaritmo neperiano.

Usamos integración por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.
Sea $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x} dx$.
Sea $dv = x^2 dx \implies v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2 \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}.$$

Ahora evaluamos la integral definida usando la regla de Barrow:

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3 \ln(2)}{3} - \frac{2^3}{9}\right) - \left(\frac{1^3 \ln(1)}{3} - \frac{1^3}{9}\right) =$$
$$= \left(\frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9}\right) - \left(\frac{1\cdot 0}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) =$$
$$= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}.$$

$$\boxed{\int_1^2 \boldsymbol{x^2 \ln(x) dx = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
b) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solución:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

Primero, estudiamos la posición relativa de los planos.
Vector normal de π_1: $\vec{n}_1 = (4, 6, -12)$, podemos simplificarlo a $\vec{n}_1 = (2, 3, -6)$.
Vector normal de π_2: $\vec{n}_2 = (-2, -3, 6)$.
Observamos que $\vec{n}_2 = -1 \cdot \vec{n}_1$. Los vectores normales son proporcionales, por lo que los planos son paralelos o coincidentes.
Comparamos los términos independientes. Reescribimos π_2 multiplicando por -1: $2x + 3y - 6z + 5 = 0$.
Comparamos con π_1 (simplificada dividiendo por 2): $2x + 3y - 6z + 1/2 = 0$.
Como $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = 1$, pero $\frac{D_1}{D_2} = \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10} \neq 1$, los planos son paralelos y no coincidentes.

El lado del cubo, L, es la distancia entre los dos planos paralelos π_1 y π_2.
Usamos la fórmula de la distancia entre planos paralelos $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ y $Ax+By+Cz+D_2 = 0$:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

.
Usamos las formas $2x + 3y - 6z + 1/2 = 0$ y $2x + 3y - 6z + 5 = 0$.

$$L = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|1/2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|1/2 - 10/2|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-9/2|}{\sqrt{49}} = \frac{9/2}{7} = \frac{9}{14}.$$

El volumen del cubo es $V = L^3$.

$$V = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} ud^3$$

$$\boxed{\boldsymbol{Volumen = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744}\ \text{ud}^3.}}$$

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

El vector $\vec{AB} = B - A = (1 - 2, 2 - 1, 3 - 3) = (-1, 1, 0)$.
En un cuadrado ABCD, el vector $\vec{BC}$ debe ser perpendicular a $\vec{AB}$ y tener la misma longitud.
$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$. La longitud del lado es $\sqrt{2}$.

El punto C pertenece a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.
$\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$
$\pi_3 \equiv x - y + z = 2$
Sea $z = \lambda$. De π_3, $x = y - z + 2 = y - \lambda + 2$.

Sustituimos en π_2: $-2(y - \lambda + 2) - 3y + 6\lambda - 5 = 0$ $-2y + 2\lambda - 4 - 3y + 6\lambda - 5 = 0$ $-5y + 8\lambda - 9 = 0 \implies 5y = 8\lambda - 9 \implies y = \frac{8\lambda - 9}{5}$.

Sustituimos y para encontrar x: $x = \frac{8\lambda - 9}{5} - \lambda + 2 = \frac{8\lambda - 9 - 5\lambda + 10}{5} = \frac{3\lambda + 1}{5}$. La recta intersección r

es: $r \equiv (x, y, z) = \left(\frac{3\lambda+1}{5}, \frac{8\lambda-9}{5}, \lambda\right)$. Un punto genérico de esta recta es $C\left(\frac{3\lambda+1}{5}, \frac{8\lambda-9}{5}, \lambda\right)$. El vector $\vec{BC} = C - B = \left(\frac{3\lambda+1}{5} - 1, \frac{8\lambda-9}{5} - 2, \lambda - 3\right)$ $\vec{BC} = \left(\frac{3\lambda+1-5}{5}, \frac{8\lambda-9-10}{5}, \lambda - 3\right) = \left(\frac{3\lambda-4}{5}, \frac{8\lambda-19}{5}, \lambda - 3\right)$.
Condición 1: $\vec{BC}$ es perpendicular a $\vec{AB}$. $\vec{BC} \cdot \vec{AB} = 0$.

$$\left(\frac{3\lambda-4}{5}, \frac{8\lambda-19}{5}, \lambda - 3\right) \cdot (-1, 1, 0) = 0$$

$$(-1)\frac{3\lambda-4}{5} + (1)\frac{8\lambda-19}{5} + 0(\lambda - 3) = 0$$

$$\frac{-3\lambda + 4 + 8\lambda - 19}{5} = 0 \implies 5\lambda - 15 = 0 \implies 5\lambda = 15 \implies \lambda = 3.$$

Para $\lambda = 3$, el punto C es: $x_C = \frac{3(3)+1}{5} = \frac{10}{5} = 2$. $y_C = \frac{8(3)-9}{5} = \frac{24-9}{5} = \frac{15}{5} = 3$. $z_C = 3$. $C(2, 3, 3)$.
Condición 2: $|\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 = 2$.

Para $\lambda = 3$, $\vec{BC} = \left(\frac{3(3)-4}{5}, \frac{8(3)-19}{5}, 3 - 3\right) = \left(\frac{9-4}{5}, \frac{24-19}{5}, 0\right) = \left(\frac{5}{5}, \frac{5}{5}, 0\right) = (1, 1, 0)$. $|\vec{BC}|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 1 + 1 + 0 = 2$. Se cumple.
El punto C es $(2, 3, 3)$.
Finalmente, hallamos D usando la propiedad del paralelogramo $\vec{AD} = \vec{BC}$. $D = A + \vec{BC} = (2, 1, 3) + (1, 1, 0) = (2 + 1, 1 + 1, 3 + 0) = (3, 2, 3)$.

$$\boxed{\boldsymbol{C(2, 3, 3)} \text{ y } \boldsymbol{D(3, 2, 3)}}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:

Definimos los sucesos:

R = "Artículo comprado con precio rebajado" $\implies P(R) = 0.60$.

$\overline{R}$ = "Artículo comprado sin rebaja" $\implies P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0.60 = 0.40$.

D = "Artículo es devuelto".

Datos del enunciado:

$P(D|R) = 0.15$ (Probabilidad de devolución si fue rebajado).

$P(D|\overline{R}) = 0.08$ (Probabilidad de devolución si no fue rebajado).

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

Se pide calcular $P(D)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|\overline{R})P(\overline{R})$$

$$P(D) = (0.15)(0.60) + (0.08)(0.40)$$

$$P(D) = 0.090 + 0.032 = 0.122.$$

El porcentaje global de artículos devueltos es $0.122 \times 100 = 12.2\%$.

El porcentaje global de artículos devueltos es del 12.2%.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Se pide calcular $P(R|D)$, la probabilidad de que un artículo devuelto fuera rebajado. Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(R|D) = \frac{P(D|R)P(R)}{P(D)}$$

Ya hemos calculado todos los valores necesarios: $P(D|R) = 0.15$, $P(R) = 0.60$, $P(D) = 0.122$.

$$P(R|D) = \frac{(0.15)(0.60)}{0.122} = \frac{0.090}{0.122} = \frac{90}{122} = \frac{45}{61}.$$

Calculamos el valor numérico y el porcentaje:

$$P(R|D) \approx 0.7377$$

El porcentaje es $0.7377 \times 100 \approx 73.77\%$.

El 73.77% (aproximadamente) de los artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados.

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Dadas las matrices $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, **se pide:**

a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) Para $\boldsymbol{m=0}$, **calcular** $\boldsymbol{A\cdot B}$ **y** $\boldsymbol{A^{-1}\cdot B}$.
c) Calcular $\boldsymbol{B\cdot B^t}$ **y** $\boldsymbol{B^t\cdot B}$, **donde** $\boldsymbol{B^t}$ **denota la matriz traspuesta de B.**

Solución:

a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

La matriz A admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m(4(-1)-m(1))-0+2(-2(1)-4(0)) \\ &= m(-4-m)+2(-2) = -4m-m^2-4 \\ &= -(m^2+4m+4) = -(m+2)^2 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero:

$$|A| = -(m+2)^2 = 0 \implies m+2=0 \implies m=-2.$$

La matriz A admite inversa para todos los valores de m excepto $m=-2$.

$$\boxed{\textbf{A admite inversa para } \boldsymbol{m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}}.}$$

b) Para $\boldsymbol{m=0}$, **calcular** $\boldsymbol{A\cdot B}$ **y** $\boldsymbol{A^{-1}\cdot B}$.

Para $m=0$, la matriz es $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos $A\cdot B$:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-2)+0(0)+2(0) \\ -2(-2)+4(0)+0(0) \\ 0(-2)+1(0)+(-1)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $A^{-1}B$, primero calculamos A^{-1} para $m=0$. $|A|_{m=0} = -(0+2)^2 = -4$.

$$\text{Adj}(A)_{m=0} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -(2) & -2 \\ -(-2) & 0 & -0 \\ -8 & -(4) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) + (-1/2)(0) + 2(0) \\ (1/2)(-2) + 0(0) + 1(0) \\ (1/2)(-2) + 0(0) + 0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

c) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

$B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una matriz 3×1. $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz 1×3.

$B \cdot B^t$ es un producto $(3 \times 1) \times (1 \times 3)$, resultando en una matriz 3×3.

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-2) & (-2)(0) & (-2)(0) \\ (0)(-2) & (0)(0) & (0)(0) \\ (0)(-2) & (0)(0) & (0)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$B^t \cdot B$ es un producto $(1 \times 3) \times (3 \times 1)$, resultando en una matriz 1×1 (un escalar).

$$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)(-2) + (0)(0) + (0)(0) = 4.$$

(Como matriz 1×1, es (4)).

$$\boxed{\boldsymbol{BB^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^tB = (4)}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
b) Calcular $f'(4)$.
c) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

Primero, definimos la función a trozos debido al valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Dividimos numerador y denominador por x (o $\sqrt{x^2}$ para el denominador):

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 9/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+9/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Dividimos numerador y denominador por x (cuidado con el signo al introducirlo en la raíz): si $x \to -\infty$, x es negativo, y $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x/(-x)}{\sqrt{x^2/(-x)^2 + 9/(-x)^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+9/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 1$ también cuando $x \to -\infty$.

Existe una asíntota horizontal en $y = 1$ (tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$).

b) Calcular $f'(4)$.

Como $x = 4 > 0$, usamos la rama $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = x(x^2+9)^{-1/2}$. Calculamos la derivada usando la regla del cociente o del producto:
Usando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+9} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}(2x)}{(\sqrt{x^2+9})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \frac{\frac{(x^2+9)-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} = \frac{9}{(x^2+9)^{3/2}}.$$

Evaluamos en $x = 4$:

$$f'(4) = \frac{9}{(4^2+9)^{3/2}} = \frac{9}{(16+9)^{3/2}} = \frac{9}{(25)^{3/2}} = \frac{9}{(\sqrt{25})^3} = \frac{9}{5^3} = \frac{9}{125}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(4) = \frac{9}{125}}}$$

c) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

El área es $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.
Observamos que $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ es una función par, ya que $f(-x) = \frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2+9}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = f(x)$.
Por lo tanto, el área es $A = 2\int_{0}^{1} f(x)dx$.
Para $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

$$A = 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

Usamos la sustitución $u = x^2 + 9$, entonces $du = 2xdx$, o $xdx = du/2$.
Límites de integración: si $x = 0$, $u = 0^2 + 9 = 9$; si $x = 1$, $u = 1^2 + 9 = 10$.

$$A = 2\int_9^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2} = \int_9^{10} u^{-1/2}du$$

$$= \left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_9^{10} = [2\sqrt{u}]_9^{10}$$

$$= 2\sqrt{10} - 2\sqrt{9} = 2\sqrt{10} - 2(3) = 2\sqrt{10} - 6.$$

Como $f(x)$ es siempre no negativa (ya que $|x| \geq 0$ y $\sqrt{x^2+9} > 0$), el área es directamente el valor de la integral.

$$\boxed{\text{Área} = \boldsymbol{2\sqrt{10} - 6}}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

Primero, obtenemos un punto y vector director de r.
De $2x+y=2$, $y=2-2x$. De $5x+z=6$, $z=6-5x$.
Haciendo $x=\lambda$, $r \equiv (\lambda, 2-2\lambda, 6-5\lambda)$.
Un punto de r es $A(0,2,6)$ (para $\lambda=0$).
El vector director de r es $\vec{v}_r = (1,-2,-5)$.
El punto exterior es $P(1,1,1)$.
Formamos el vector $\vec{AP} = P - A = (1-0, 1-2, 1-6) = (1,-1,-5)$.
La distancia es $d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.
Calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(5-10) - \vec{j}(-5-(-5)) + \vec{k}(-2-(-1))$$

$$= (-5, 0, -1).$$

Calculamos su módulo:

$$|\vec{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+0+1} = \sqrt{26}$$

Calculamos el módulo del vector director:

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$$

La distancia es

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{26}{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{195}}{15} ud$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(P,r) = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{195}}{15} \text{ud}}}$$

b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

Recta r: Punto $A(0,2,6)$, vector $\vec{v}_r = (1,-2,-5)$.
Recta s: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$.
Punto $B(2,-1,1)$, vector $\vec{v}_s = (-1,1,1/3)$.
Podemos usar un vector proporcional $\vec{v}_s = (-3,3,1)$.
Comprobamos si $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales: $\frac{1}{-3} \neq \frac{-2}{3}$. No son paralelas. Se cortan o se cruzan.
Formamos el vector $\vec{AB} = B - A = (2-0, -1-2, 1-6) = (2,-3,-5)$.

Estudiamos el producto mixto $[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2(-5) - (-5)3) - (-3)(1(1) - (-5)(-3)) + (-5)(1(3) - (-2)(-3))$$

$$= 2(-2 + 15) + 3(1 - 15) - 5(3 - 6)$$

$$= 2(13) + 3(-14) - 5(-3) = 26 - 42 + 15 = -1.$$

Como el producto mixto es $-1 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. Las rectas se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan.

c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Sea π el plano buscado. Como es perpendicular a s, su vector normal $\vec{n}_\pi$ es el vector director de s. Usamos $\vec{v}_s = (-3, 3, 1)$.
La ecuación del plano es de la forma $-3x + 3y + 1z + D = 0$.
El plano pasa por $P(1, 1, 1)$. Sustituimos para hallar D:

$$-3(1) + 3(1) + 1(1) + D = 0$$

$$-3 + 3 + 1 + D = 0 \implies 1 + D = 0 \implies D = -1.$$

La ecuación del plano es $-3x + 3y + z - 1 = 0$.

$$\boldsymbol{\pi \equiv -3x + 3y + z - 1 = 0 \text{ (o } 3x - 3y - z + 1 = 0)}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad y Estadística

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución:

Definimos sucesos:

A = "Producto es de tipo A" $\implies P(A) = 0.75$

B = "Producto es de tipo B" $\implies P(B) = 0.25$

D = "Producto es defectuoso"

Datos de probabilidades condicionadas:

$P(D|A) = 0.025$

$P(D|B) = 0.05$

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

Primero calculamos la probabilidad global de que un producto elegido al azar sea defectuoso, usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

$$P(D) = (0.025)(0.75) + (0.05)(0.25)$$

$$P(D) = 0.01875 + 0.0125 = 0.03125.$$

Esta es la probabilidad de que un producto sea defectuoso. Si se fabrican $N = 5000$ productos, el número esperado de defectuosos es $E[Defectuosos] = N \times P(D)$.

$$E[Defectuosos] = 5000 \times 0.03125 = 156.25.$$

Se espera que aproximadamente 157 productos sean defectuosos.

Se espera que 156.25 (aprox. 157) productos sean defectuosos.

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

En este caso, solo hay productos tipo A.
Sea X el número de unidades defectuosas entre las 6000 fabricadas. Cada unidad puede ser defectuosa (éxito) con probabilidad $p = P(D|A) = 0.025$, o no defectuosa (fracaso) con $q = 1 - p = 0.975$.
La variable X sigue una distribución Binomial: $X \sim B(n = 6000, p = 0.025)$.

Podemos aproximar esta Binomial por una Normal si se cumplen las condiciones: $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$.

$n \cdot p = 6000 \times 0.025 = 150$.
$n \cdot q = 6000 \times 0.975 = 5850$.
Ambos valores son mayores que 5, por lo que la aproximación es válida.
La Normal aproximada X' tendrá media $\mu = np = 150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000 \times 0.025 \times 0.975} = \sqrt{146.25} \approx 12.093$.
Así, $X' \sim N(\mu = 150, \sigma = 12.093)$.
Se pide calcular $P(X > 160)$. Al aproximar una variable discreta (Binomial) por una continua (Normal), aplicamos la corrección por continuidad de Yates:
$P(X > 160) \approx P(X' \geq 160.5)$.
Estandarizamos la variable: $Z = \frac{X' - \mu}{\sigma}$.

$$P(X' \geq 160.5) = P\left(Z \geq \frac{160.5 - 150}{12.093}\right) = P\left(Z \geq \frac{10.5}{12.093}\right) \approx P(Z \geq 0.868).$$

Usamos la propiedad del complementario:

$$P(Z \geq 0.868) = 1 - P(Z < 0.868) \approx 1 - P(Z \leq 0.87).$$

Buscamos $P(Z \leq 0.87)$ en la tabla N(0,1): $\Phi(0.87) = 0.8078$.

$$P(X > 160) \approx 1 - 0.8078 = 0.1922.$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621

La probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas es aproximadamente 0.1922.